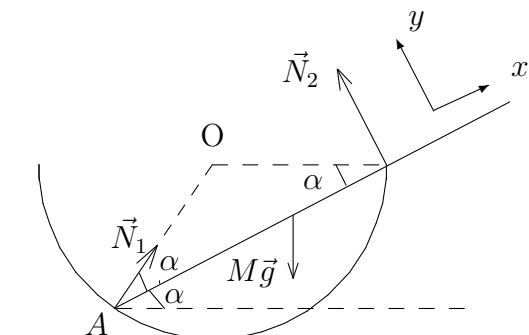


Решение задачи 3 (I уровень)

На стержень действуют три силы: сила тяжести $M\vec{g}$, приложенная в середине стержня, и силы реакции чашки \vec{N}_1 и \vec{N}_2 . Сила \vec{N}_1 , действующая на нижний конец стержня, направлена перпендикулярно поверхности чашки, т.е. по ее радиусу; сила \vec{N}_2 , приложенная к стержню со стороны края чашки, направлена перпендикулярно стержню. Векторная сумма этих сил равна нулю, что в проекциях на оси x и y дает уравнения:



$$N_1 \cos \alpha - Mg \sin \alpha = 0, \quad (1)$$

$$N_2 + N_1 \sin \alpha - Mg \cos \alpha = 0. \quad (2)$$

Равенство нулю суммы моментов сил относительно точки A (точка приложения силы \vec{N}_1) дает третье уравнение

$$LMG \cos \alpha - 2RN_2 \cos \alpha = 0. \quad (3)$$

Исключая из системы уравнений (1) – (3) силы N_1 и N_2 , получаем соотношение

$$\cos 2\alpha = \frac{L}{2R} \cos \alpha \quad (4)$$

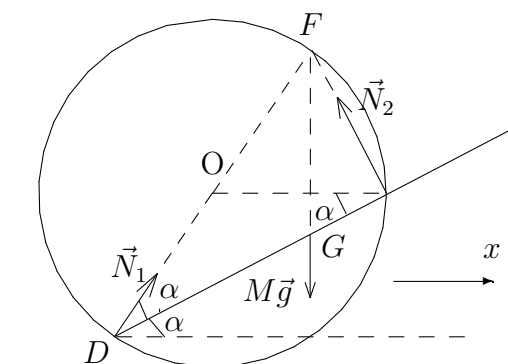
или

$$4R \cos^2 \alpha - L \cos \alpha - 2R = 0,$$

из которого находим искомый угол

$$\cos \alpha = \frac{L + \sqrt{L^2 + 32R^2}}{8R}.$$

Существует и другой, чисто геометрический способ решения этой задачи. Вначале докажем следующее утверждение: если на тело, находящееся в положении равновесия, действуют три силы, лежащие в одной плоскости, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке. Рассмотрим точку пересечения линии действия каких-либо двух сил, например, \vec{N}_1 и \vec{N}_2 , и составим условие равенства нулю суммы моментов всех сил относительно этой точки.



Моменты сил \vec{N}_1 и \vec{N}_2 относительно точки пересечения их продолжений равны нулю, поэтому и момент третьей силы $M\vec{g}$ также должен быть равен нулю, т.е. линия действия силы $M\vec{g}$ проходит через эту точку (точка F). Данное подтверждение достаточно для нахождения положения равновесия стержня. Из рисунка видно (с учетом того, что точка F лежит на той же окружности), что проекции отрезков DF и DG на ось x равны. Следовательно, $DF \cos 2\alpha = DG \cos \alpha$. Так как $DF = 2R$, $DG = L$ полученное уравнение идентично уравнению (4).